УДК 517.5

БЕСКОНЕЧНОКРАТНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ

Д.В. Фуфаев[1]

1 *fufaevdv@rambler.ru*; Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет

Представлены результаты о суммировании рядов Фурье на бесконечномерном торе, а также предложено обобщение для случая абстрактных пространств с мерой.

Ключевые слова: ряды Фурье, тензорное произведение, сходимость почти всюду.

Бесконечномерным тором $\mathbb{T}^\infty$ называется декартово произведение счетного числа одномерных торов $\mathbb{T}$. На $\mathbb{T}^\infty$ рассматривается система функций, называемая системой Йессена: $\theta_{n_1,\dots,n_p}(x) = \prod\limits_{r=1}^{p} e^{2\pi i n_r x_r}$, где $p \in \mathbb{N}$, $n_r \in \mathbb{Z}$, $x = (x_1,\dots,x_p,\dots) \in \mathbb{T}^\infty$, обобщающая тригонометрическую систему на счетное число переменных. Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L(\mathbb{T}^\infty)$ по этой системе, представимые в виде $S_{p,n_1\dots,n_p}(x) = \sum\limits_{k_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum\limits_{k_p=-n_p}^{n_p} c_{k_1,\dots,k_p} e^{2\pi i(k_1x_1+\dots+k_px_p)}$. Через $\sigma_{p,n_1\dots,n_p}(x)$ обозначим средние арифметические частичных сумм этого ряда, которые назовем средними Фейера. Скажем, что они сходятся в усиленном смысле, если для каждого $p \in \mathbb{N}$ сходятся (как кратные ряды) к σ_p ряды $\sigma_{p,n_1\dots,n_p}$ и существует конечный предел их сумм: $\lim\limits_{p\to\infty} \sigma_p$.

Пусть $\mathbb{T}^\infty = \prod\limits_{l=1}^{D} \mathbb{T}^{M_l}$, где $D, M_l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Обозначим через P^l проектор на соответствующее подпространство координат.

Назовем мультииндекс $\mathbf{n} = (n_1,\dots,n_p)$ возрастающим ограниченно, если $\max\limits_{1\le i,j\le p} \frac{n_i}{n_j} \le L < \infty$, $\min\limits_{1\le i\le p} n_i \to \infty$, и возрастающим D-ограниченно, если все $P^l(\mathbf{n})$, $l = 1,\dots,D$, возрастают ограниченно. D-ограничнность в случае счетного числа переменных понимается как D-ограничнная сходимость рядов $\sigma_{p,n_1\dots,n_p}$ для каждого $p \in \mathbb{N}$.

Теорема. *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{l=0}^{D-1} L(\log^+ L)^r(\mathbb{T}^\infty)$. *Тогда средние Фейера функции* f *сходятся* D*-ограниченно в усиленном смысле к* f *почти всюду на* $\mathbb{T}^\infty$.

При $D = 1$ получаем ограниченную сходимость (обобщение сходимости по кубам), при $D = \infty$ — вариант сходимости по Прингсхейму (по прямоугольникам).

Естественным будет обобщить эти результаты для случая абстрактных пространств. Пусть (X^k, μ^k), $k \in \mathbb{N}$ — пространства с мерой, причем $\mu^k(X^k) = 1$.

Пусть теперь для каждого $k \in \mathbb{N}$ задана последовательность операторов $\{T^k_{n^k}\}$, переводящая $L^1(X^k, \mu^k)$ в себя, причем в каждой последовательности есть "нулевой" тривиальный оператор интегрирования: $T^k_{0^k} f = I_{X^k}(f) = \int\limits_{X^k} f(x)\,d\mu^k(x)$ для любой функции $f \in L^1(X^k, \mu^k)$. От разрозненных пространств функций и операторов на них нам надо перейти к функциям, заданным на произведении пространств.

Пусть $f^1 \in L^1(X^1, \mu^1)$, $f^2 \in L^1(X^2, \mu^2)$, тогда их тензорным произведением называется функция $f^1 \otimes f^2 \in L^1(X^1 \times X^2, \mu^1 \otimes \mu^2)$, определяемая по формуле $f^1 \otimes f^2(x_1, x_2) = f^1(x_1) f^2(x_2)$, где $\mu^1 \otimes \mu^2$ — это произведение мер μ^1 и μ^2. Такие функции называются элементарными тензорами. Алгебраическим тензорным произведением $L^1(X^1, \mu^1)$ и $L^1(X^2, \mu^2)$ называется пространство линейных комбинаций элементарных тензоров и обозначается $L^1(X^1, \mu^1) \otimes L^1(X^2, \mu^2)$. Проективным тензорным произведением, обозначаемым $L^1(X^1, \mu^1) \hat{\otimes} L^1(X^2, \mu^2)$, называется пополнение алгебраического по так называемой проективной норме ([1], 0.3.28), оно изометрически изоморфно $L^1(X^1 \times X^2, \mu^1 \otimes \mu^2)$ ([1], следствие 0.3.36).

Далее, если непрерывные линейные операторы T^i переводят $L^1(X^i, \mu^i)$ в себя, $i = 1, 2$, то существует единственный непрерывный линейный оператор $T^1 \hat{\otimes} T^2$, называемый тензорным произведением данных операторов, переводящий $L^1(X^1, \mu^1) \hat{\otimes} L^1(X^2, \mu^2)$ в себя, такой, что на элементарных тензорах он действует по формуле: $T^1 \hat{\otimes} T^2[f \cdot g](x, y) = T^1 f(x) \cdot T^2 g(y)$ ([1], теорема 0.3.40).

Будем считать, что тензорное произведение бесконечного числа тривиальных операторов — тривиальный оператор, то есть, что $\bigotimes\limits_{k \geq j} T^k_{0^k} = I_{\prod\limits_{k \geq j} X^k}$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Тогда мы можем определить бесконечное произведение операторов, лишь конечное число из которых отлично от тривиального: $T^1_{n^1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} T^p_{n^p} \hat{\otimes} T^{p+1}_{0^{p+1}} \hat{\otimes} \cdots = T^1_{n^1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} T^p_{n^p} \hat{\otimes} I_{\prod\limits_{k \geq p+1} X^k}$ для любого $p \in \mathbb{N}$. Сходимость $\hat{\bigotimes\limits_{1 \leq k \leq \infty}} T^k_{n^k} f$ к f понимается как сходимость $T^1_{n^1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} T^p_{n^p} \hat{\otimes} I_{\prod\limits_{k \geq p+1} X^k}$ к f_p при $\min\limits_{k=1,\ldots,p} n^k \to \infty$ для каждого $p \in \mathbb{N}$ и сходимость f_p к f при $p \to \infty$.

Теорема. *Пусть (X^k, μ^k), $k \in \mathbb{N}$ — пространства с мерой, $\mu_k(X^k) = 1$, для каждого $k \in \mathbb{N}$ задана последовательность операторов $\{T^k_{n^k}\}$, переводящая $L^1(X^k, \mu^k)$ в себя, каждая из которых имеет "нулевой" элемент, тогда*

а) если для любого $p \in \mathbb{N}$ и любой функции $f \in L^1\left(\prod\limits_{k=1}^{p} X^k, \bigotimes\limits_{k=1}^{p} \mu^k\right)$ выполнено $\hat{\bigotimes\limits_{1 \leq k \leq p}} T^k_{n^k} f \to f$ при $\min\limits_{k=1,\ldots,p} n^k \to \infty$ $\bigotimes\limits_{k=1}^{p} \mu^k$-почти всюду, то для любой функции $f \in L^1\left(\prod\limits_{k=1}^{\infty} X^k, \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mu^k\right)$ верно, что $\hat{\bigotimes\limits_{1 \leq k \leq \infty}} T^k_{n^k} f$ сходится $\bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mu^k$-почти всюду к f;

б) если для любого $p \in \mathbb{N}$ и любой функции $f \in L(\ln^+ L)^{p-1}\left(\prod\limits_{k=1}^{p} X^k, \bigotimes\limits_{k=1}^{p} \mu^k\right)$ выполнено $\hat{\bigotimes\limits_{1 \leq k \leq p}} T^k_{n^k} f \to f$ при $\min\limits_{k=1,\ldots,p} n^k \to \infty$ $\bigotimes\limits_{k=1}^{p} \mu^k$-почти всюду, то для любой функции $f \in \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} L(\ln^+ L)^r \left(\prod\limits_{k=1}^{\infty} X^k, \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mu^k\right)$ верно, что $\hat{\bigotimes\limits_{1 \leq k \leq \infty}} T^k_{n^k} f$ сходится к f $\bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mu^k$-почти всюду.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента "Ведущие научные школы РФ" (проект 7461.2016.1).

Литература

1. Хелемский А. Я. *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии.* – М.: Наука, 1989. – 464 с.

INFINITE TENSOR PRODUCTS AND CONVERGENCE ALMOST EVERYWHERE

D.V. Fufaev

The results on summation of the Fourier series on the infinite-dimensional torus were presented, also the generalization for the case of abstract measure space was formulated.

Keywords: Fourier series, tensor product, convergence almost everywhere.

УДК 517.55 : 517.574 : 517.987.1

МЕРЫ ХАУСДОРФА НУЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РОСТ

Б.Н. Хабибуллин[1], З.Ф. Абдуллина[2], А.П. Розит[3]

1 *khabib-bulat@mail.ru*; Башкирский государственный университет
2 *zilya-apa@mail.ru*; Башкирский государственный университет
3 *rozit@mail.ru*; Башкирский государственный университет

Пусть M — субгармоническая функция с мерой Рисса ν_M в области D из n-мерного комплексного евклидова пространства $\mathbb{C}^n$, f — ненулевая голоморфная в D функция, $|f| \leq \exp M$ на D и функция f обращается в нуль на множестве $\mathsf{Z} \subset D$. Тогда ограничения на рост меры Рисса ν_M функции M вблизи границы области D влекут за собой определённые ограничения на размеры или площадь/объем множества Z. Количественная форма исследования этого явления даётся в субгармоническом обрамлении.

Ключевые слова: голоморфная функция, нулевое множество, субгармоническая функция, мера Рисса, мера Хаусдорфа.

Многомерные результаты об описании нулевых множеств голоморфных функций с ограничениями на рост их модуля вблизи границы ∂D области определения D до середины 1990-х гг. содержатся в книге [1], в статьях [2]– [4], обзорах [5, **6.5**], [6, § 6]. Так, в случае ограниченной ненулевой голоморфной функции широго известно, что объем ее нулевого множества ограничен (часть классической теорема Г. М Хенкина – Сكоды), а в случае не более степенного роста ненулевой голоморфной функции того же порядка роста (часть теоремы Ш. М. Даутова – Скоды). Случай целых функций многих переменных достаточно полно освещён в [7]– [12]. Некоторые субгармонические многомерные результаты подобного типа получены относительно недавно в [13]. Для голоморфных и субгармонических функций в областях на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ история рассматриваемой тематики достаточно детально изложена в [14]. Мы рассматриваем лишь «лёгкую часть» задачи об описании нулевых (под)множеств голоморфных функций с заданной мажорантой: необходимые условия в виде ограничений на рост «площади–объёма» нулевого множества вблизи границы области определения. Но даётся она в самой общей форме: для произвольных областей и очень широкого круга условий как по отношению ограничений на рост